Nafouz

التمرين الأول: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:

1) الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x+1}$ هي دالة:

أ) فردية ب) زوجية ج) ليست زوجية وليست فردية

2) حل المعادلة التفاضلية: $y' - \ln 3y - \ln 27 = 0$ والذي يحقق $y(0) = 6$ هو

أ) $y(x) = e^x - \ln 3$ ب) $y(x) = 3^{x+2} - 3$ ج) $y(x) = 9e^x - 3$

3) A و B حدثان مستقلان و $P(A) = 0.2$ و $P(A \cup B) = 0.35$ ، احتمال الحدث B هو:

أ) $P(B) = 0.15$ ب) $P(B) = 0.1875$ ج) $P(B) = 0.125$

4) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1 + \ln x)dx$

نضع: $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{36}$ قيمة S هي.

أ) $S = 2022$ ب) $S = 1444$ ج) $S = 1443$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) - x = 0$.

3) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1; \sqrt{3}]$ فإنّ: $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

II. (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{3}$

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n = \dfrac{(U_n)^2}{3 - (U_n)^2}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ استنتج U_n بدلالة n وأحسب نهاية (U_n) مجددا.

3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n : $S_n = \dfrac{1}{V_0} + \dfrac{1}{V_1} + \cdots + \dfrac{1}{V_n}$ و $S'_n = \dfrac{1}{(U_0)^2} + \dfrac{1}{(U_1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(U_n)^2}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات لا نفرق بينها باللّمس ، كريتان تحملان الرقم: 0 و أربع كريات تحمل الرقم :2 وكرية تحمل الرقم: 1 وكرية تحمل الرقم: 4.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق.

نعتبر الحدثين:

A : "الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6".

B: "الكريات المسحوبة جداء أرقامها يساوي 8"

1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.
2) أحسب $P(A\cap B)$ ، هل الحدثين A و B مستقلان؟. برّر إجابتك.
3) استنتج $P_A(B)$ ، ثمّ $P(\overline{A\cap B})$.
4) ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.
   ب) أحسب $P\left(\frac{X^2-16}{X}>0\right)$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وبيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ فسر النتائج المتحصل عليها بيانيا.
2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$.
   ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
   ج) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.
3) g الدالة العددية المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x+\ln x$.
   أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.
   ب) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$: $1+x+\ln x>0$.
   ج) إستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).
4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (T).
5) m وسيط حقيقي موجب ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\ln x=\sqrt{m}x-1$.
6) أحسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x$ ، $x=1$ و $x=e$.

الإجابة النموذجية عن أسئلة البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التحليل:

1/ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}$ هي دالة

الجواب: أ/ فردية

التحليل:

لدينا $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

* لدينا f متناظرة بالنسبة لـ "o"

أي من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

* $f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{(e^x-1)}{e^x+1}$

$=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

2/ حل المعادلة التفاضلية $y'-\ln3\,y-\ln27=0$ والتي تحقق $y(0)=6$ هي

الجواب: ب/ $y(x)=3^{x+2}-3$

التحليل:

لدينا $y'-\ln3\,y=\ln27$

$y'=(\ln3)y+\ln27$

هي من الشكل $y'=ay+b$

حلولها من الشكل

$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

إذا $y(x)=Ce^{(\ln3)x}-\frac{\ln27}{\ln3}$

$=Ce^{\ln3^x}-\frac{3\ln3}{\ln3}$

$\boxed{y(x)=C\times3^x-3}$ ——(1)

لدينا $y(0)=6$ أي

$C\times3^0-3=6$

$C=6+3=9$

بالتعويض في (1) نجد:

$y(x)=9\times3^x-3$

$=3^2\times3^x-3$

$\boxed{y(x)=3^{x+2}-3}$

3/ A, B حدثان مستقلان

$P(A\cup B)=0{,}35$, $P(A)=0{,}2$

احتمال الحادثة B هو

الجواب: ب/ $P(B)=0{,}1875$

التحليل:

لدينا A, B مستقلان

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ولدينا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$P(A\cap B)-P(A)=P(B)(1-P(A))$

$P(B)=\frac{P(A\cap B)-P(A)}{1-P(A)}$

$=\frac{0{,}35-0{,}2}{1-0{,}2}=\boxed{0{,}1875}$

4/ (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)$

المجموع S_n حيث:

$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$

الجواب: ج/ $S_n=1443$

التحليل:

نحسب

$$U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx$$

$$=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$=2\ln e^{n+1}+(\ln(e^{n+1}))^2-2\ln e^n-(\ln e^n)^2$$

$$=2(n+1)+(n+1)^2-2n-n^2$$

$$=\cancel{2n}+2+\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{2n}-\cancel{n^2}$$

$$=2n+3$$

وهي متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول 3

$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$

$$S_n=\frac{(n-p+1)}{2}(U_p+U_n)\quad\Big|\ p=0,\ n=36$$

$$=\left(\frac{36-0+1}{2}\right)(U_0+U_{36})$$

$$=\frac{37}{2}(3+75)=\frac{37\times 78}{2}$$

$$=1443$$

التمرين الثاني:

I. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

1/ دراسة تغيرات f وتشكيل جدول تغيراتها.

* نهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

* اتجاه تغير f:

f دالة ق.إ على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\frac{\frac{2(x^2+1)-2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

لأن: $x^2+1>0$ و $\sqrt{x^2+1}>0$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2/ حل المعادلة $f(x)-x=0$

$$f(x)-x=0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-x=0$$

$$\frac{2x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

وبالتالي

$$2x-x\sqrt{x^2+1}=0$$

$$x(2-\sqrt{x^2+1})=0$$

اما $x=0$ او $2-\sqrt{x^2+1}=0$

$$2-\sqrt{x^2+1}=0$$

$$\sqrt{x^2+1}=2$$

$$x^2+1=4$$

$$x^2=3$$

$x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة

$$S=\{0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$$

3/ بيان أنه من أجل $x\in[1,\sqrt{3}]$

فإن $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$

لدينا $x\in[1,\sqrt{3}]$

أي $1\leq x\leq\sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1,\sqrt{3}]$ فإن

$$f(1)\leq f(x)\leq f(\sqrt{3})$$

$$1\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\leq f(x)\leq\sqrt{3}$$

أي $1\leq f(x)\leq\sqrt{3}$

ومنه $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$

II $U_0=1$ ، $U_{n+1}=f(U_n)$

1/ أ) بيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$$1\leq U_n\leq\sqrt{3}$$

نفرض $P(n): 1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

$P(0): 1\leq U_0=1\leq\sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

لدينا $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1,\sqrt{3}]$ فإن

$$f(1)\leq f(U_n)\leq f(\sqrt{3})$$

$$1\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}$$

أي $1\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1\leq U_n\leq\sqrt{3}$$

ب) دراسة اتجاه تغير (U_n)

واستنتاج تقاربها وحساب نهاية (U_n)

$$U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n$$

$$=\frac{2U_n-U_n\sqrt{U_n^2+1}}{\sqrt{U_n+1}}$$

$$=\frac{U_n(2-\sqrt{U_n^2+1})}{\sqrt{U_n^2+1}}$$

إشارة الفرق من إشارة

$2-\sqrt{U_n^2+1}$ لأن $\sqrt{U_n^2+1}>0$

و $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

لدينا $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

$$1\leq U_n^2\leq 3$$

$$2\leq U_n^2+1\leq 4$$

$$\sqrt{2}\leq\sqrt{U_n^2+1}\leq 2$$

بضرب الطرفين بالعدد (-1) نجد

$$-2\leq-\sqrt{U_n^2+1}\leq-\sqrt{2}$$

$$0\leq 2-\sqrt{U_n^2+1}\leq 2-\sqrt{2}$$

ومنه $2-\sqrt{U_n^2+1}\geq 0$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

ملاحظة

يمكن استخدام جدول إشارة

$2-\sqrt{x^2+1}$

* الإستنتاج:

(U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى ($U_n\leq\sqrt{3}$) فهي متقاربة

* حساب نهاية (U_n)

لدينا (U_n) متقاربة وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} U_n=l$$

$$f(l)=l$$

$$f(l)-l=0$$

قمنا بحل المعادلة سابقا

وحلولها هي

$$S=\{0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$$

$l=0$ مرفوض لأن $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

$l=-\sqrt{3}$ مرفوض لأن $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

$l=\sqrt{3}$ مقبول

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{3}$$

/2 $$V_n=\frac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$$

1/ تبيان أن (V_n) م هندسية بطلب

$V_0=?$ و $q=?$

$$V_{n+1}=\frac{(U_{n+1})^2}{3-(U_{n+1})^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}{3-\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}$$

$$=\frac{\frac{4U_n^2}{\cancel{U_n^2+1}}}{\frac{3U_n^2+3-4U_n^2}{\cancel{U_n^2+1}}}$$

$$=\frac{4U_n^2}{-U_n^2+3}=4\left(\frac{U_n^2}{3-U_n^2}\right)$$

$$=4V_n$$

ومنه (V_n) م هندسية أساسها

$q=4$

وحدها الأول

$$V_0 = \frac{(U_0)^2}{3-(U_0)^2} = \frac{1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ب/ كتابة V_n بدلالة n واستنتاج U_n بدلالة n وحساب نهاية (U_n)

* لدينا (V_n) م. هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \qquad p=0,\ q=4,\ n=n$$

$$= V_0 \times 4^{n-0}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2}(4)^n}$$

* كتابة U_n بدلالة n

لدينا $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$

$$V_n(3-U_n^2) = U_n^2$$

$$3V_n - U_n^2V_n - U_n^2 = 0$$

$$U_n^2(-V_n-1) = -3V_n$$

$$U_n^2 = \frac{-3V_n}{-V_n-1}$$

$$U_n^2 = \frac{3V_n}{V_n+1}$$

$$\begin{cases} U_n = -\sqrt{\frac{3V_n}{V_n+1}} & \text{(مرفوض لأن } 1 \le U_n < \sqrt{3}\text{ أي)} \\ U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n+1}} \end{cases}$$

ومنه

$$U_n = \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})\times 4^n}{(\frac{1}{2})\times 4^n+1}}$$

* حساب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})4^n}{\frac{1}{2}\times 4^n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\times \cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4^n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3/2}{1/2}} = \sqrt{3}$$

3/ حساب بدلالة n المجموع

$$S_n = \frac{1}{V_0}+\frac{1}{V_1}+ \dots + \frac{1}{V_n}$$

لدينا $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ م هندسية أساسها $q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_n = \frac{1/V_0}{1-q'}\left(1-(q')^{n-0+1}\right)$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

ص ٢

$$S'_n = \frac{1}{(U_0)^2} + \frac{1}{(U_1)^2} + \dots + \frac{1}{(U_n)^2}$$

لدينا $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$

أي $\dfrac{1}{V_n} = \dfrac{3-U_n^2}{U_n^2}$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3}{U_n^2} - 1$$

$$\frac{1}{V_n} + 1 = \frac{3}{U_n^2}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_n}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{U_n^2}$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}\right) + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{(n+1) \text{ مرة}}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

التمرين الثالث :

2	2	1	0
2	2	4	0

التجربة : سحب 3 كريات

الكيفية : في آن واحد

طريقة العد : توفيقة $C_8^3 = 56$

"A" الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6

"B" " " جداء أرقامها يساوي 8

1/ حساب $P(A)$ و $P(B)$

3 كريات ② أو ⓪ و ②، ④

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+8}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

3 كريات ② أو ② ① ④

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2/ حساب $P(A \cap B)$ وهل الحدثان A و B مستقلان

$A \cap B$ الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 ومجموعها 6

توجد حالة واحدة وهي 3 كريات ②

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

X	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
X		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
X^2-16		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{X^2-16}{X}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة $\frac{X^2-16}{X} > 0$ هي

$-4 < X < 0$ أو $X > 4$

$$P\left(\frac{X^2-16}{X}\right) = P(X>4)$$
$$= P(X=8) + P(X=16)$$
$$= \frac{8}{16} + \frac{6}{16} = \frac{14}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

التمرين الرابع:

$$f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$D_f =]0,+\infty[$

1/ حساب $\lim_{x \to 0} f(x)$ وبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ وتفسير النتائج

$$* \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = +\infty$$

لأن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1+\ln x)^2 = +\infty$ ،

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 2\ln x + (\ln x)^2}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}$$
$$= 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{\ln y^2}{y}\right)^2$$
$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{2\ln y}{y}\right)^2 = 0$$

ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f)

2/ أ/ بيان أنه من أجل x من $]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

f دالة ق ا على $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)x - (1+\ln x)^2}{x^2}$$
$$= \frac{(1+\ln x)\left[2 - (1+\ln x)\right]}{x^2}$$
$$= \frac{(1+\ln x)(2-1-\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=\frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+\ln x)(1-\ln x)$ لأن $x^2>0$

$1+\ln x=0$

$\ln x=-1$

$\boxed{x=e^{-1}}$

$1-\ln x=0$

$-\ln x=-1$

$\ln x=1$

$\boxed{x=e}$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]e^{-1},e[$ ومتناقصة على المجالين $]-\infty,e^{-1}[$ و $]e,+\infty[$

* جدول التغيرات f ،

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$f(e)=\frac{2}{e}$

$f(e^{-1})=0$

ج/ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة "1"

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(1)=1$ / $f(1)=1$

$y=1(x-1)+1$

$y=x-1+1$

$\boxed{(T)\ y=x}$

3/ $g(x)=1-x+\ln x$

$D_g=]1,+\infty[$

* أ/ دراسة اتجاه تغير g

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ في $]1,+\infty[$

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ودالتها المشتقة g'

$g'(x)=-1+\frac{1}{x}$

$=\frac{-x+1}{x}<0$

لأن $x>1$ و $x>1$

$-x+1<0$

ومنه g متناقصة على $]1,+\infty[$

استنتاج إشارة $g(x)$

لدينا $g(1)=0$ و g دالة متناقصة على $]1,+\infty[$ ومنه $g(x)<0$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	

ب/ تبرير أنه من أجل $x\in]1,+\infty[$ فإن $1+x+\ln x>0$

لدينا $x>1$

$\ln x>0$ ---- (1)

$x>1$

$x+1>2>0$ ---- (2)

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف فإن

$$\boxed{x+1+\ln x>0}$$

ج/ استنتاج وضعية (C_g) بالنسبة للمستقيم (T)

$$f(x)-y=\frac{(1+\ln x)^2}{x}-x$$

$$=\frac{(1+\ln x)^2-x^2}{x}$$

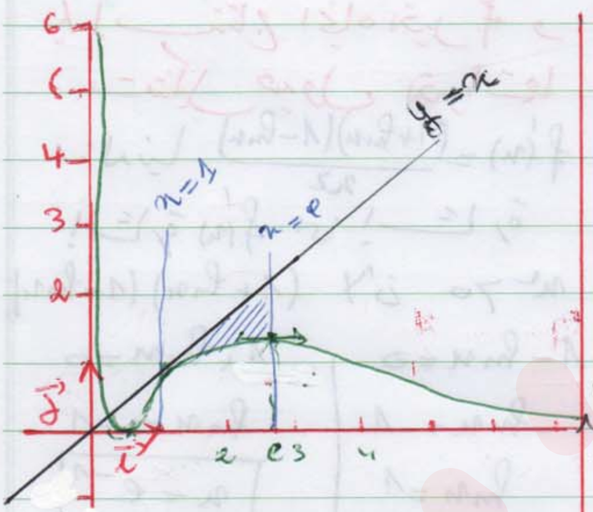
$$=\frac{(1-x+\ln x)(1+x+\ln x)}{x}$$

$$=\frac{g(x)(1+x+\ln x)}{x}\leq 0$$

لأن $g(x)\leq 0$ و $1+x+\ln x>0$ و $x>0$

ومنه

x	1	$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$
الوضعية	(C_g) / (T)	(C_g) تحت (T)



5/ المناقشة البيانية حسب قيم m عدد حلول المعادلة $\ln x=\sqrt{m}x-1$

لدينا $\ln x=\sqrt{m}x-1$

$\ln x+1=\sqrt{m}x$

$(\ln x+1)^2=mx^2$

$\frac{(\ln x+1)^2}{x}=mx$

$f(x)=mx$

المناقشة تؤول إلى إيجاد فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم الدوار ذو المعادلة $y=mx$

لدينا $y=mx$ يشمل نقطة ثابتة وهي $O(0,0)$

قيم m	المناقشة
$m=0$	حل مضاعف
$0<m<1$	ثلاث حلول متمايزة
$m=1$	حلان أحدهما مضاعف
$m>1$	حل وحيد

6/ حساب مساحة الحيز

المحدد بـ (C_g) والمستقيمات

$x=e$, $x=1$, $y=x$

$$A=\int_1^e y-f(x)\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x-(\ln x)^2-\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-1-1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-0-0-0\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{2}\ u.a$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{17}{6}\ u.a$$